

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : آمار و احتمال	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۱۱ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	سوالات		نمره

## آمار و احتمال

۱ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید:

الف عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

ب عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.

۲ فرض کنید:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$C = \{x \in A \cup B \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

مجموعه C را با اعضا بنویسید.

۳ از مجموعه اعداد  $\{600, \dots, 102, 101, 100\}$  عددی به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ می تواند باشد؟

با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید:

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$$

اگر داشته باشیم:  $A|B = (A \cap B)'$  عمل اشتراک را به وسیله | بازنویسی کنید.

۵

ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هریک را بنویسید.

۶

$$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

الف

$$\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$$

ب

$$\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$$

پ

$$\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y-3}{5} = 0$$

۷ اگر  $S = \{a, b, c, d\}$  فضای نمونه ای یک تجربه تصادفی و  $P(b) = \frac{1}{3}$ ,  $P(\{b, d\}) = \frac{1}{4}$  و  $P(\{b, c\}) = \frac{2}{3}$  باشد آنگاه  $P(a)$  را به دست آورید.

از مجموعه  $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 1000\}$  عددی را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که:

۸ عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، ولی بر ۵ بخش پذیر نباشد.

۹ عدد انتخابی نه بر ۳ بخش پذیر باشد و نه بر ۵.

۱۰ اگر  $S = \{a, b, c, d\}$  فضای نمونه ای یک پدیده تصادفی باشند به طوری که  $P(a) = \frac{1}{3}$ ,  $P(\{b, c\}) = \frac{1}{4}$  و  $P(\{a, c\}) = \frac{1}{4}$ . در این صورت  $P(\{a, d\})$  را به دست آورید.

۱۱ به چند حالت می‌توان  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  را افراز کرد که هیچ دو عدد فردی باهم در یک مجموعه افراز ظاهر نشوند؟

۱۲ برای دو پیشامد  $A$  و  $B$  از فضای نمونه  $S$  ثابت کنید:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

۱۳ ثابت کنید:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

۱۴ در یک شرکت که ۵۰ کارمند دارد ۳۲ نفر آن‌ها مرد هستند و ۲۰ نفر دارای مدرک فوق‌لیسانس می‌باشند. ۱۱ نفر از این کارمندان مرد، مدرک فوق‌لیسانس دارند. یک نفر به تصادف از بین کارمندان انتخاب می‌شود. احتمال آنکه این فرد نه مرد بوده و نه مدرک فوق‌لیسانس داشته باشد را محاسبه کنید.

۱۵ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند و  $P(A) + P(B') = \frac{5}{4}$  باشد، حاصل  $P(A'|B) + P(B|A')$  را به دست آورید.

۱۶ چهار ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۶ تایی آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تایی آن‌ها قرمز هستند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم، احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

۱۷ عبارت زیر را به زبان سورها بنویسید، سپس آن را نقیض کنید:  
فقط یک عدد طبیعی وجود دارد که هم زوج است و هم اول.

۱۸ با استفاده از قوانین و خواص جبر مجموعه‌ها درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف

$$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$$

۱۹ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U :

الف ثابت کنید که:  $A \subseteq A \cup B$

ب درستی استدلال خود را توضیح دهید.

۲۰ دروازه‌بان یک تیم فوتبال، اگر روحیه خوبی داشته باشد، با احتمال ۶۰ درصد و اگر روحیه بدی داشته باشد، با احتمال ۳۰ درصد ضربه پنالتی را مهار می‌کند. پیش از اولین ضربه پنالتی، روحیه این دروازه‌بان خوب است احتمال آن را به دست آورید که این دروازه‌بان در سه ضربه پنالتی اول، دوم و سوم، دقیقاً دو ضربه آخر را مهار کند. (با مهار هر پنالتی، روحیه دروازه‌بان خوب و در غیر این صورت بد می‌شود.)

در مدرسه‌ای ۶۰ درصد دانش‌آموزان در رشته تجربی و ۴۰ درصد دانش‌آموزان در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند. در این مدرسه،  $\frac{1}{3}$  دانش‌آموزان رشته تجربی و  $\frac{1}{4}$  دانش‌آموزان رشته ریاضی، معدل بالای ۱۸ کسب کرده‌اند. دانش‌آموزی به تصادف از این مدرسه انتخاب شده و معدل او بالای ۱۸ است. احتمال آنکه این فرد، دانش‌آموز رشته تجربی باشد را به دست آورید.

ارزش گزاره سوری زیر را مشخص کنید و نقیض آن را بنویسید.

$$\forall x \in \mathbb{R}; (|x+1| \neq 0 \wedge |x-3| \geq 2)$$



$$(A \cup B) \cap (A' \cup C) \subseteq B \cup C$$

۲۴ اگر احتمال قبولی کیومرث در آزمون رانندگی سه برابر احتمال قبولی خسرو در این آزمون باشد و احتمال قبولی لااقل یکی از این دو برابر  $\frac{17}{25}$  باشد، احتمال قبولی خسرو در این آزمون چقدر است؟

۲۵ دو جعبه داریم. درون یکی از آن‌ها ۹ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب قرار دارد و درون جعبه دیگر ۱۵ لامپ قرار دارد که ۵ تای آن‌ها معیوب است. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر سالم باشد؟

۲۶ فرض کنید مجموعه  $A$  به صورت زیر باشد:

$$A = \{ \{1, 2\}, \{\emptyset, 1, \{\{3\}, 1, 4\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}, \{6, 7, 8\}\}\}, \{4, \emptyset, \{\{\{3, 4, 8\}\}, \{5\}\}\} \}$$

در این صورت چند تا  $a$  وجود دارد که  $a \in B \in A$  باشد؟

۲۷ تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که  $P(1) = \frac{1}{12}$  و  $P(1)$  تا  $P(6)$  یک دنباله حسابی افزایشی تشکیل می‌دهند. اگر این تاس را پرتاب کنیم احتمال ظاهر شدن عدد اول را حساب کنید.

۲۸ از مجموعه  $S = \{51, 52, \dots, 300\}$  عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم؛ احتمال این را بیابید که عدد انتخاب شده بر ۶ یا ۷ بخش پذیر باشد ولی مضرب ۴۲ نباشد.

۲۹ برای دو پیشامد  $A$  و  $B$  از فضای نمونه‌ای  $S$  ثابت کنید:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

۳۰ یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک بار پرتاب این تاس، احتمال برآمدن اعداد ۲ یا ۳ چقدر است؟



۳۱

سه فرد A, B و C به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال به هدف نخوردن تیر آن‌ها به ترتیب  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{2}{3}$  است. اگر بدانیم فقط دو تیر به هدف خورده، حال احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد، چقدر است؟

۳۲

اگر برای  $x, y, z \geq 0$  داشته باشیم:

$$\{x + y + z, xy + xz + yz, x^2 + y^2 + z^2\} = \{1, 2\}$$

حاصل عبارات درون مجموعه سمت چپ را بیابید.

۳۳

در یک کلاس ۲۰ نفره نمره آمار و احتمال همه دانش‌آموزان باهم متفاوت است. دو نفر به تصادف از این کلاس انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم نمره نفر اول از نفر دوم بیشتر می‌باشد، به چه احتمالی اولین نفر انتخاب‌شده بالاترین نمره را کسب کرده است؟

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge (p \vee r)$$

آیا دو عبارت زیر به یک معنی هستند؟ (آیا هم‌ارز هستند؟) ۳۵

- (۱) اگر عدد  $a$  بر ۶ بخش‌پذیر نباشد آنگاه یا بر ۲ بخش‌پذیر نیست یا بر ۳.  
 (۲) عدد  $a$  بر ۲ بخش‌پذیر نیست یا اگر بر ۶ بخش‌پذیر نباشد آنگاه بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند: ۳۶

الف با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$$

ب ثابت کنید:  $(A')' = A$

۳۷ ارزش گزاره  $[p \vee (\sim q \wedge \sim p)] \vee q$  را بیابید.



آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : آمار و احتمال	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۱۴ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	پاسخنامه		نمره

## آمار و احتمال

الف ۱

بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر ۲ : پیشامد A  
بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر ۳ : پیشامد B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{100}{2}\right]}{100} + \frac{\left[\frac{100}{3}\right]}{100} - \frac{\left[\frac{100}{6}\right]}{100}$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100}$$

ب

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{67}{100} = \frac{33}{100}$$

۲

اعضای مجموعه C اعضایی از  $A \cup B$  هستند که گزاره  $x \in A \Rightarrow x \in B$  درموردشان صحیح باشد. این گزاره برای تمام اعضای B صحیح است و برای اعضای A که در B نیستند صحیح نیست. توجه داشته باشید که این گزاره برای دو عضو از مجموعه B، ۶ و ۷ به انتفای مقدم برقرار است. بنابراین خواهیم داشت:  $C = B$

۳

A: پیشامد مضرب ۴  
B: پیشامد مضرب ۹

$$n(S) = 600 - 100 + 1 = 501$$

$$n(A) = \left[\frac{600}{4}\right] - \left[\frac{99}{4}\right] = 150 - 24 = 126 \Rightarrow P(A) = \frac{126}{501}$$

$$n(B) = \left[\frac{600}{9}\right] - \left[\frac{99}{9}\right] = 66 - 11 = 55 \Rightarrow P(B) = \frac{55}{501}$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{600}{36}\right] - \left[\frac{99}{36}\right] = 16 - 2 = 14 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{14}{501}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{126}{501} + \frac{55}{501} - \frac{14}{501} = \frac{167}{501} = \frac{1}{3}$$

پاسخ سؤال ۴

$$\left. \begin{aligned} (A \cap B) &\subseteq A \\ B &\subseteq (A \cup B) \Rightarrow B \subseteq (A \cap B) \end{aligned} \right\} \Rightarrow B \subseteq A$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:  $A \subseteq B$

بنابراین:  $A = B$

$$A \cap B = (A|B)|(A|B)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} (A|B)|(A|B) &= (A \cap B)'|(A \cap B)' \\ &= [(A \cap B)' \cap (A \cap B)']' \\ &= (A \cap B)'' = A \cap B \end{aligned}$$

الف

این گزاره درست نیست، چون به ازای  $x = 1$  تساوی  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$  برقرار نیست و مجموعه جواب گزاره‌ها برابر  $\mathbb{R}$  نیست. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$$

ب

این گزاره درست نیست چون اگر  $n = 5$  باشد، آنگاه:

$$2^n + 1 = 2^5 + 1 = 33 = 11 \times 3$$

بنابراین  $2^5 + 1$  عددی اول نیست و این به این معنی است که مجموعه جواب گزاره‌ها برابر با  $\mathbb{N}$  نیست. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\exists n \in \mathbb{N} : (2^n + 1) \notin P$$

پ

این گزاره درست نیست چون اگر  $x = \frac{-1}{2}$ ، آنگاه:

$$x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

این به این معنی است که مجموعه جواب این گزاره‌ها برابر با  $(-\infty, 0)$  نیست. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\exists x \in (-\infty, 0) : x - \frac{1}{x} > -2$$



$$\frac{y-3}{5} = 0$$

بنابراین مجموعه جواب این گزاره ناتهی است. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \frac{y-3}{5} \neq 0$$

$$P(\{b, c\}) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(b) + P(c) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + P(c) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(c) = \frac{1}{3}$$

$$P(\{b, d\}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(b) + P(d) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{3} + P(d) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(d) = \frac{1}{6}$$

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow P(a) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \Rightarrow P(a) = \frac{1}{6}$$

۷

پاسخ سؤالات ۸ تا ۹

۸

$$3 \text{ بخش پذیری بر } P(A) = \frac{\left[\frac{1000}{3}\right]}{1000} = \frac{333}{1000}$$

$$5 \text{ بخش پذیری بر } P(B) = \frac{\left[\frac{1000}{5}\right]}{1000} = \frac{200}{1000}$$

$$5 \text{ و } 3 \text{ هم بر هم } P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{1000}{15}\right]}{1000} = \frac{66}{1000}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{333}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{267}{1000}$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - \left(\frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000}\right) = \frac{533}{1000}$$

۹

$$P(\{a, c\}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(a) + P(c) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(c) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(c) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{b, c\}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(b) + P(c) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(b) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \Rightarrow P(b) = \frac{1}{12}$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + P(d) = 1 \Rightarrow P(d) = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow P(\{a, d\}) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

۱۰



از آنجایی که سه عدد فرد داریم، پس باید مجموعه را به حداقل سه زیرمجموعه افراز کنیم. تعداد افرازاها به سه زیرمجموعه که هیچ دو عدد فردی باهم قرار نگیرند، برحسب اینکه اعداد ۲ و ۴ چطور قرار بگیرند، برابر با ۹ است. تعداد افرازاها به چهار زیرمجموعه با همان شرط نیز برابر با ۷ است و افرازهای ۵تایی نیز به تعداد یکی است. بنابراین تعداد افرازاها با شرط گفته شده برابر است با:

$$9 + 7 + 1 = 17$$

راه حل دیگری هم وجود دارد، آن هم اینکه افرازهای سه تایی و چهارتایی را باهم بشماریم: اگر ۲ و ۴ کنار هم باشند یا هردو با هم در یک باکس جدا هستند یا هردو با هم کنار یکی از عددهای فرد هستند. اگر ۲ و ۴ کنار هم باشند، تعداد افراز چهارتایی برابر با ۱ و تعداد افرازهای سه تایی برابر با ۳ است. بنابراین تعداد کل افرازاها که ۲ و ۴ کنار هم باشند، برابر با ۴ است.

اگر ۲ و ۴ جدا از هم باشند، ابتدا ۲ باکس از ۴ باکس را انتخاب کرده و در جایگشت ۲ ضرب می کنیم، پس  $2 \times \binom{4}{2}$  حالت خواهیم داشت.

تعداد افراز پنج تایی نیز برابر با یک است. بنابراین تعداد کل افرازاها برابر با  $17 = 1 + 4 + 12$  است.

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

$$P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)]$$

$(A - B)$  و  $(A \cap B)$  دو پیشامد ناسازگارند پس:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\forall x, y; (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in (C \times D)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in C \wedge y \in B \wedge y \in D$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$$

A: مرد بودن و B: فوق لیسانس داشتن

$$P(A) = \frac{32}{50}, \quad P(B) = \frac{20}{50}, \quad P(A \cap B) = \frac{11}{50}$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - \frac{41}{50} = \frac{9}{50}$$

$$P(A'|B) = P(A') \quad , \quad P(B|A') = P(B)$$

$$\Rightarrow P(A'|B) + P(B|A') = P(A') + P(B)$$

$$\frac{5}{4} = P(A) + P(B') = 1 - P(A') + 1 - P(B) = 2 - (P(A') + P(B))$$

$$\Rightarrow P(A') + P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(R) = P(A_1)P(R|A_1) + P(A_2)P(R|A_2) + P(A_3)P(R|A_3) + P(A_4)P(R|A_4)$$

$$P(R) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{29}{60}$$

حل به روش نمودار درختی هم امکان پذیر است.

$$\exists x \in \mathbb{N}; \{x \in E \wedge x \in P \wedge [\forall y \in \mathbb{N}; ((y \in E \wedge y \in P) \Rightarrow x = y)]\}$$

و نقیض آن:

$$\forall x \in \mathbb{N}; \{x \notin E \vee x \notin P \vee [\exists y \in \mathbb{N}; ((y \in E \wedge y \in P) \wedge x = y)]\}$$

الف

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C')$$

$$= \underbrace{[(A \cap B) \cap A']}_{\emptyset} \cup [(A \cap B) \cap C'] = (A \cap B) \cap C' = A \cap (B \cap C')$$

$$= A \cap (B - C)$$

الف

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

بنابراین داریم:

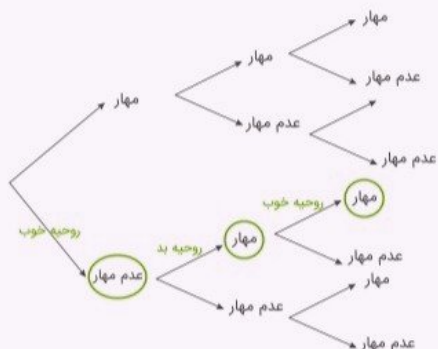
$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$$

ب

مطابق این استدلال هر عضو A، عنصر A ∪ B هم می باشد و بنابراین گزاره A ⊆ A ∪ B درست است.

$$P(A'_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A'_1) \cdot P(A_2 | A'_1) \cdot P(A_3 | A'_1 \cap A_2) \\ = \frac{40}{100} \times \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{72}{1000} = 0.072$$

روش دوم:



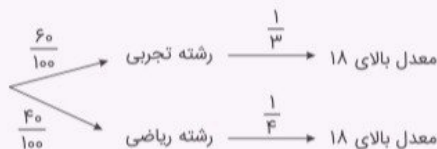
$$P(A'_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{40}{100} \times \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{72}{1000} = 0.072$$

$B_1$ : پیشامد تحصیل در رشته تجربی

$B_2$ : پیشامد تحصیل در رشته ریاضی

$A$ : پیشامد داشتن معدل بالای ۱۸

روش اول:



$$P(A) = \frac{60}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{20}{100} + \frac{10}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

روش دوم:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

روش سوم:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)}$$

$$= \frac{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

ارزش نادرست است.

$$\sim [\forall x \in \mathbb{R}; (|x+1| \neq 0 \wedge |x-3| \geq 2)] \equiv (\exists x \in \mathbb{R}; (|x+1| = 0 \vee |x-3| < 2))$$



$$\begin{aligned}
 & x \in (A \cup B) \cap (A' \cup C) \\
 & \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A' \cup C \\
 & \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A' \vee x \in C) \\
 & \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (\sim(x \in A) \vee x \in C) \\
 & \Rightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge \sim(x \in A)] \vee [(x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C] \\
 & \Rightarrow [x \in B \wedge \sim(x \in A)] \vee [(x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)] \\
 & \Rightarrow [x \in B \wedge \sim(x \in A)] \vee [(x \in B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in C)] \\
 & \Rightarrow \{[x \in B \wedge \sim(x \in A)] \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
 & \Rightarrow \{x \in B \wedge [\sim(x \in A) \vee x \in C]\} \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
 & \Rightarrow [x \in B \vee (x \in A \wedge x \in C)] \wedge \{[\sim(x \in A) \vee x \in C] \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \\
 & \Rightarrow (x \in B \vee x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C) \wedge (\sim(x \in A) \vee x \in C) \\
 & \Rightarrow (x \in B \vee x \in C)
 \end{aligned}$$

راهحل دوم:

$$\begin{aligned}
 & x \in (A \cup B) \cap (A' \cup C) \\
 & \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A' \cup C \\
 & \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A' \vee x \in C) \\
 & \Rightarrow (x \in A \vee [x \in B \wedge (x \in B \vee x \in C)]) \wedge (\sim(x \in A) \vee [x \in C \wedge (x \in C \vee x \in B)]) \\
 & \Rightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in B \vee x \in C)] \wedge [(\sim(x \in A) \vee x \in C) \wedge (\sim(x \in A) \vee x \in C \vee x \in B)] \\
 & \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (\sim(x \in A) \vee x \in C) \wedge (x \in A \vee x \in B \vee x \in C) \wedge (\sim(x \in A) \vee x \in C \vee x \in B) \\
 & \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (\sim(x \in A) \vee x \in C) \wedge [(x \in A \wedge \sim(x \in A)) \vee (x \in C \vee x \in B)] \\
 & \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (\sim(x \in A) \vee x \in C) \wedge [F \vee (x \in C \vee x \in B)] \\
 & \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (\sim(x \in A) \vee x \in C) \wedge (x \in C \vee x \in B) \\
 & \Rightarrow (x \in C \vee x \in B)
 \end{aligned}$$

$$P(\text{خسرو}) = x \quad P(\text{کیومرث}) = 3x$$

$$P(\text{خسرو یا کیومرث}) = x + 3x - 3x^2 = \frac{17}{25}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + \frac{17}{25} = 0 \Rightarrow (3x - \frac{17}{5})(x - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{15} = \frac{17}{24}$$

$$۱) \{۱, ۲\} \in A$$

$$۲) \{\emptyset, ۱, \{\{۳\}, ۱, ۴\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}, \{۶, ۷, ۸\}\}\}\} \in A$$

$$۳) \{۴, \emptyset, \{\{\{۳, ۴, ۸\}\}, \{۵\}\} \in A$$

حال برای B سه حالت داریم و اعضای این سه حالت، حالات مختلف a هستند. یعنی:

$$۱) ۱, ۲$$

$$۲) \emptyset, ۱, \{\{۳\}, ۱, ۴\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}, \{۶, ۷, ۸\}\}\}$$

$$۳) ۴, \emptyset, \{\{\{۳, ۴, ۸\}\}, \{۵\}\}$$

با اجتماع اعضای هر سه حالت B و با حذف تکراری‌ها، ۷ حالت برای a خواهیم داشت.

قدر نسبت دنباله را d می‌گیریم. با توجه به افزایشی بودن دنباله  $d > ۰$ .

$$P(۱) = \frac{1}{۱۲}, P(۲) = \frac{1}{۱۲} + d, P(۳) = \frac{1}{۱۲} + ۲d, P(۴) = \frac{1}{۱۲} + ۳d, P(۵) = \frac{1}{۱۲} + ۴d, P(۶) = \frac{1}{۱۲} + ۵d$$

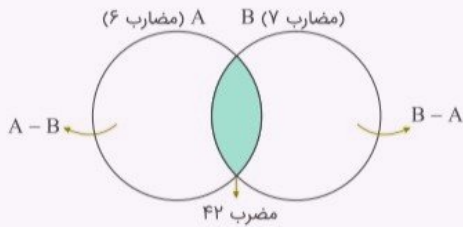
$$P(۱) + \dots + P(۶) = ۱ \Rightarrow \frac{1}{۱۲} + (\frac{1}{۱۲} + d) + \dots + (\frac{1}{۱۲} + ۵d) = ۱ \Rightarrow \frac{۶}{۱۲} + ۱۵d = ۱ \Rightarrow d = \frac{1}{۳۰} = \frac{۲}{۶۰}$$

$$P(۱) = \frac{1}{۱۲} = \frac{۵}{۶۰}, P(۲) = \frac{۷}{۶۰}, P(۳) = \frac{۹}{۶۰}, P(۴) = \frac{۱۱}{۶۰}, P(۵) = \frac{۱۳}{۶۰}, P(۶) = \frac{۱۵}{۶۰}$$

$$A = \{۲, ۳, ۵\}$$

$$P(A) = P(۲) + P(۳) + P(۵) = \frac{۷}{۶۰} + \frac{۹}{۶۰} + \frac{۱۳}{۶۰} = \frac{۲۹}{۶۰}$$





$$n(S) = 300 - 51 + 1 = 250$$

تعداد مضارب ۶ از ۵۱ تا ۳۰۰:

$$n(A) = \left[ \frac{300}{6} \right] - \left[ \frac{50}{6} \right] = 50 - 8 = 42 \Rightarrow n(A) = 42$$

تعداد مضارب ۷ از ۵۱ تا ۳۰۰:

$$n(B) = \left[ \frac{300}{7} \right] - \left[ \frac{50}{7} \right] = 42 - 7 = 35 \Rightarrow n(B) = 35$$

تعداد مضارب ۴۲ از ۵۱ تا ۳۰۰:

$$n(A \cap B) = \left[ \frac{300}{42} \right] - \left[ \frac{50}{42} \right] = 7 - 1 = 6 \Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

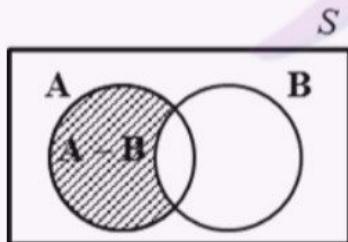
$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{42}{250} - \frac{6}{250} + \frac{35}{250} - \frac{6}{250} = \frac{65}{250}$$

$$A \cap B' = A - B \Rightarrow A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$(A \cap B)$  و  $(A - B)$  دو پیشامد متمایز و از هم جدا هستند.



$$P(1) = P(3) = P(5) = xP(2) = P(4) = P(6) = 3x$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$P(2) + P(3) = 3x = \frac{1}{4}$$

وقتی دو تیر به هدف خورده باشد، پس یک تیر به هدف نخورده است.

$$\text{تیر A به هدف نخورده: } P(A') \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$\text{تیر B به هدف نخورده: } P(A) \cdot P(B') \cdot P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$\text{تیر C به هدف نخورده: } P(A) \cdot P(B) \cdot P(C') = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

حال مجموع این احتمالات را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{36}$$

دو تیر به هدف خورده، حال احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد برابر است با:

$$P = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{36}} = \frac{\frac{5}{72}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{2}$$

می‌دانیم:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

درنتیجه خواهیم داشت  $x + y + z = 2$  زیرا مربع این عضو باید از دو عضو دیگر بزرگتر یا مساوی باشد. با قراردادن این مقدار در تساوی بالا خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 4$$

بنابراین:

$$xy + xz + yz = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

پیشامد A: نفر اول بیشترین نمره را داشته باشد.

پیشامد B: بیشتر شدن نمره نفر اول از نفر دوم

$$P(A \cap B) = \frac{1}{20}, \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}$$

p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	$p \vee r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	T	F	T	F
T	F	T	F	F	F	F	T	F
T	F	F	T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F	T	F
F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	T	T	T	F	F

عدد  $a$  بر ۶ بخش پذیر نیست  $p =$

عدد  $a$  بر ۲ بخش پذیر نیست  $q =$

عدد  $a$  بر ۳ بخش پذیر نیست  $r =$

عبارت اول برابر با  $p \Rightarrow (q \vee r)$  و عبارت دوم برابر با  $q \vee (p \Rightarrow r)$  است. جدول ارزش گزاره این دو عبارت را رسم می‌کنیم:

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$p \Rightarrow r$	$q \vee (p \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

ملاحظه می‌شود که دو عبارت  $p \Rightarrow (q \vee r)$  و  $q \vee (p \Rightarrow r)$  جدول ارزش یکسانی دارند، پس به یک معنی هستند. البته با تأمل روی دو عبارت در صورت سؤال نیز می‌توانید هم‌ارزی آن‌ها را دریابید.

$$\begin{aligned}
 [A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] &= [(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup (B \cap B')] \\
 &= [\phi \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup \phi] = (A \cap B) \cup (B \cap A') \\
 &= B \cap (A \cup A') = B \cap U = B
 \end{aligned}$$

$$(A')' = \{x | x \in U, x \notin A'\} = \{x | x \in U, x \in A\} = A$$

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \wedge \sim p$	$p \vee (\sim q \wedge \sim p)$	$[p \vee (\sim q \wedge \sim p)] \vee q$
د	د	ن	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن	د
ن	ن	د	د	د	د	د

ارزش این گزاره همواره درست است.

